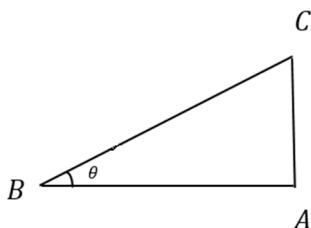


کلاس آموزش نکته مثال و تست درس ریاضی

استاد علی داوودوندی

مثلثات

تعریف نسبت‌های مثلثاتی:



$$\sin \theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{AC}{AB}$$

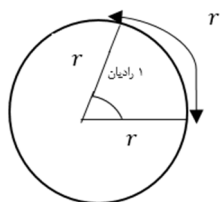
$$\cot \theta = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{AB}{AC}$$

زاویه:

واحدهای اندازه‌گیری

1- درجه: اگر دایره را به 360 قسمت مساوی تقسیم کنیم هر قسمت یک درجه خواهد بود.

2- رادیان: یک رادیان زاویه‌ای است که طول کمان مقابل آن برابر شعاع دایره است.



نکته:

$$\overset{\text{طول کمان}}{\widehat{L}} = \frac{\overset{\text{برحسب رادیان}}{\widehat{\alpha}}}{\underset{\text{شعاع دایره}}{r}}$$

مثال: اگر طول یک کمان 3 برابر شعاع زاویه‌ی مربوط به آن چند رادیان است؟

$$\alpha = \frac{L}{r} = \frac{3r}{r} = 3 \text{ رادیان}$$

مثال: اگر اندازه‌ی یک زاویه 5 رادیان و شعاع برابر 3 متر باشد طول کمان مقابل آن زاویه چند متر است؟

$$5 = \frac{L}{3} \Rightarrow L = 15 \text{ متر}$$

نکته: تبدیل رادیان به درجه

$$\frac{\overset{\text{زاویه برحسب رادیان}}{\widehat{R}}}{\pi} = \frac{\overset{\text{زاویه برحسب درجه}}{\widehat{D}}}{180}$$

مثال: زاویه‌ی 40 درجه چند رادیان است؟

$$\frac{40}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{9}$$

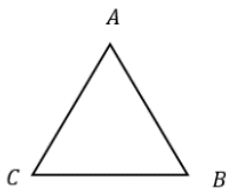
مثال: زاویه‌ی $\frac{2\pi}{3}$ چند درجه است؟

$$\frac{D}{180} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{\pi} \Rightarrow D = 120$$

کاربرد مثلثات:

1- مساحت:

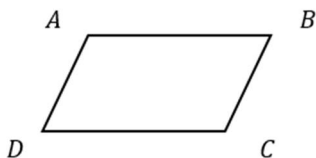
الف) مثلث



$$S_{ABC} = \frac{AB \times AC \times \sin A}{2}$$

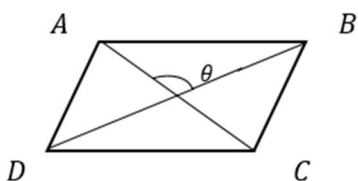
ب) متوازی الاضلاع

به کمک ضلع:



$$S_{ABCD} = AB \times AD \times \sin A$$

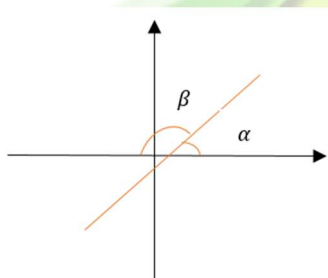
به کمک قطر:



$$S_{ABCD} = \frac{AC \times BD \times \sin \theta}{2}$$

2- شیب خط:

شیب خط برابر است با زاویه‌ای که آن خط با قسمت مثبت محور Xها می‌سازد.



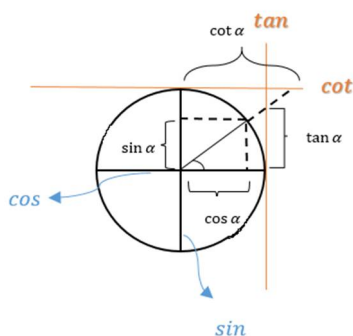
$$\alpha + \beta = 180$$

$$m = \text{شیب خط} = \tan \alpha$$

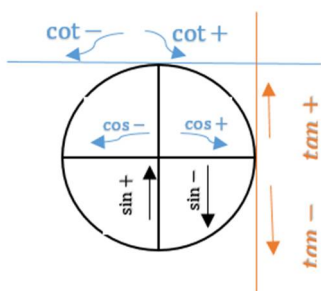
فرمول معادله‌ی خط

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

دایره مثلثاتی:



دایره‌ای است به شعاع یک.

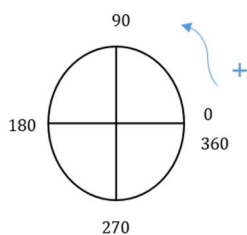


علامت نسبت‌های مثلثاتی در هر ربع:



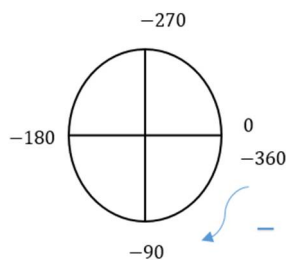
هستک

ربع چهارم	ربع سوم	ربع دوم	ربع اول
sin -	sin -	sin +	sin +
cos +	cos -	cos -	cos +
tan -	tan +	tan -	tan +
cot -	cot +	cot -	cot +

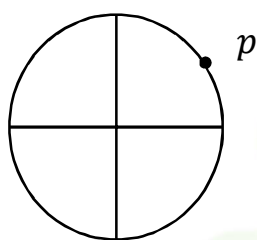


نکته: جهت مثبت دایره مثلثاتی پادساعتگرد

جهت منفی دایره مثلثاتی ساعتگرد



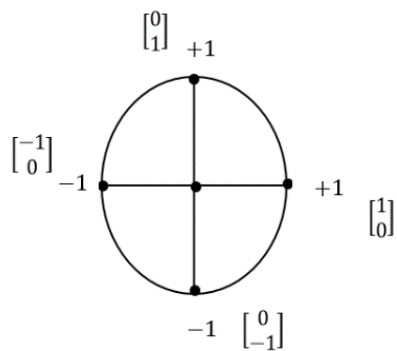
مختصات نقطه‌ی p روی دایره مثلثاتی:



شعاع دایره = a

$$p = \begin{bmatrix} a \cos \theta \\ a \sin \theta \end{bmatrix}$$

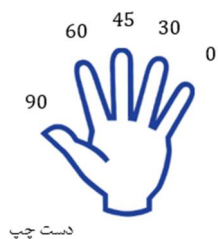
دقت شود که:



	0	$30\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$180(\pi)$	$270\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
\sin	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	0	-1
\cos	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	-1	ت

\tan	$\frac{\sqrt{0}}{\sqrt{4}} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $= \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1}} = \sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{0}}$ $= \text{ت ن}$	0	ت ن
\cot	$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{0}} = \text{ت ن}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1}} = \sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$	$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{0}}{\sqrt{4}} = 0$	ت ن	0

برای بدست آوردن نسبت مثلثاتی زوایای 0 تا 90 به گونه‌ی زیر عمل می‌کنیم:



دست چپ

با توجه به تصویر بالا برای زاویه موردنظر آن انگشت را خم می‌کنیم و:

$$\sin = \frac{\sqrt{\text{تعداد انگشت پایین}}}{2}$$

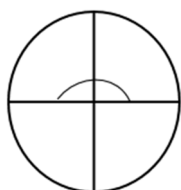
$$\cos = \frac{\sqrt{\text{تعداد انگشت بالا}}}{2}$$

$$\tan = \frac{\sqrt{\text{تعداد انگشت پایین}}}{\sqrt{\text{تعداد انگشت بالا}}}$$

$$\cot = \frac{\sqrt{\text{تعداد انگشت بالا}}}{\sqrt{\text{تعداد انگشت پایین}}}$$

برای محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی زوایای 180 و 270 از دایره‌ی مثلثاتی استفاده می‌کنیم و به کمک محورهای هر زاویه مقدار را تشخیص می‌دهیم.

180°



270°



نسبت مثلثاتی زوایای منفی:

* COS منفی خوار است.

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

متمم:

اگر $\alpha + \beta = 90^\circ$ آنگاه:

$$\sin \alpha = \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \sin \beta$$

$$\tan \alpha = \cot \beta$$

$$\cot \alpha = \tan \beta$$

مثال: $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$

$$\sin 30 = \cos 60$$

مکمل:

اگر $\alpha + \beta = 180^\circ$ آنگاه:

$$\sin \alpha = \sin \beta$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta$$

$$\tan \alpha = -\tan \beta$$

$$\cot \alpha = -\cot \beta$$

نسبت‌های مثلثاتی $\alpha \pm k\pi$ ابتدا ضریب $k\pi$ حذف می‌شود همان نسبت با α نوشته می‌شود به کمک دایره علامت تشخیص داده می‌شود.

نسبت‌های مثلثاتی $\alpha + \frac{k\pi}{2}$ ابتدا ضریب k حذف می‌شود و سپس نسبت مثلثاتی زاویه‌ی α تغییر می‌کند و به کمک دایره مثلثاتی علامت آن را تشخیص دهیم.

مثال:

$$\sin(3\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = +\tan \alpha$$

ساخت زوایا به کمک زوایای معروف

برای محاسبه‌ی نسبت‌های مثلثاتی زوایایی که به کمک زاویه‌ی معروف ساخته می‌شود: ابتدا به صورت رادیانی نوشته و تا حد امکان ساده کنید، سپس ضریب زاویه‌ی معروف را حذف می‌کنیم و همان نسبت را برای زاویه‌ی معروف می‌نویسیم و علامت آن را به کمک دایره‌ی مثلثاتی مشخص می‌کنیم.

$$\sin \frac{7\pi}{3} = + \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\cot \frac{2\pi}{3} = - \cot \frac{\pi}{3}$$

اتحادهای مثلثاتی:

$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \end{cases}$$

$$2) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$3) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$4) \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \pm \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

اتحادهای مرتبط به 2α :

$$1) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$2) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$3) \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$4) \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$5) \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$6) \tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

$$7) \cot \alpha + \tan \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$$

$$8) \cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$$

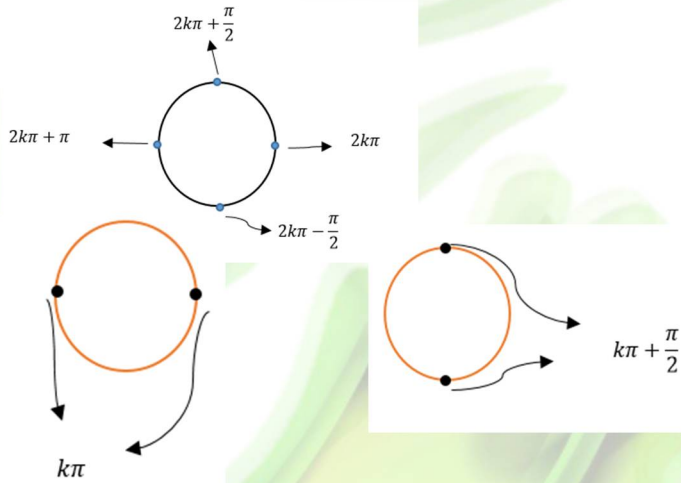
نکته:

$$1) \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$2) \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$$

$$3) \cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\alpha$$

$$4) (\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$



نکته:

معادلات مثلثاتی:

$$1) \sin x = \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$2k\pi + \pi - \alpha$$

$$2k\pi + \alpha$$



حالات خاص sin

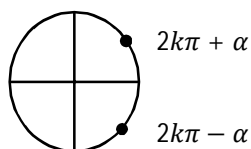
$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

2) $\cos x = \cos \alpha$

$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha$



حالت خاص \cos :

$\cos x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

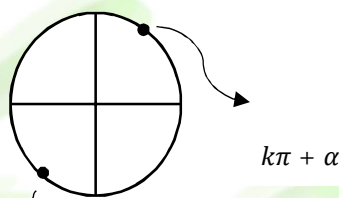
$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$

$\cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi$

3) $\tan x = \tan \alpha$

یا $\cot x = \cot \alpha$

$\Rightarrow x = 2k\pi + \alpha$



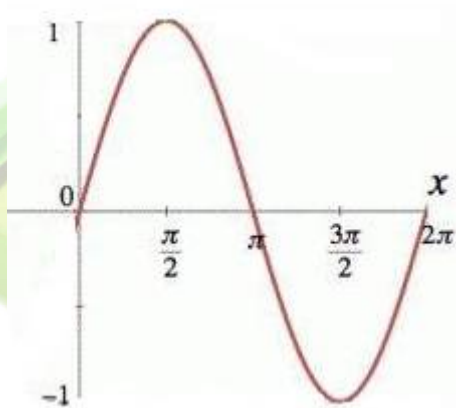
نکته:

$-\sin(x) = \sin(-x)$

$-\cos(x) = \cos(\pi - x)$

نمودارهای توابع مثلثاتی:

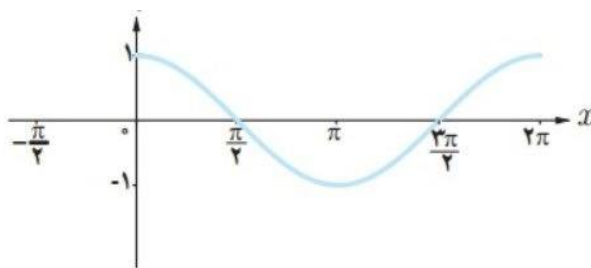
$\sin x$



$D = \mathbb{R}$

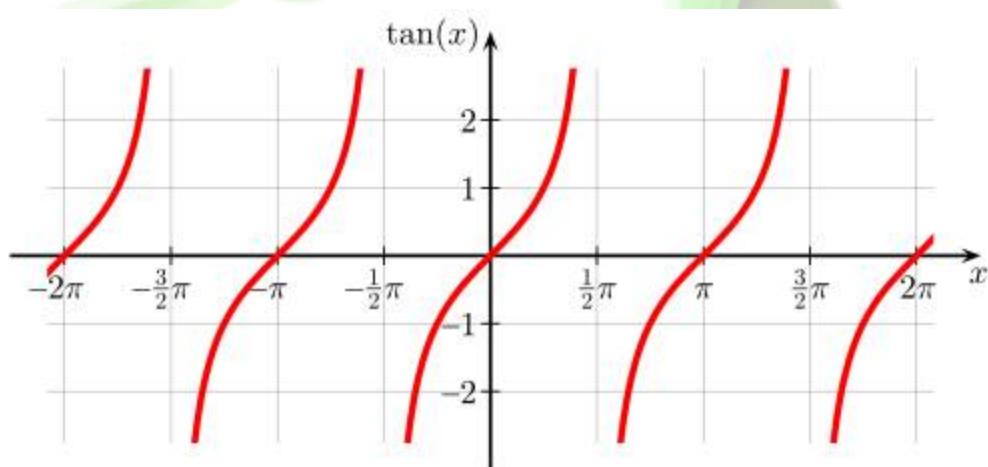
$R: [-1.1] \Rightarrow -1 \leq \sin x \leq 1$

$\cos x$



$$D = \mathbb{R} \quad R: [-1, 1] \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1$$

$\tan x$



$$D: \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \right\} \quad R: \mathbb{R}$$

دوره تناوب: (T)

$$\sin ax \text{ یا } \cos ax \quad T = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$\cot ax \text{ یا } \tan ax \quad T = \frac{\pi}{|a|}$$

$$|\sin ax| \text{ یا } |\cos ax| \quad T = \frac{2\pi}{|a|}$$



لیموترش اولین برگزار کننده آزمون های آنلاین در کشور

☎ ۰۹۱۲۰۵۷۹۲۱۲-۰۲۱۲۶۷۶۴۴۲۹

📍 @POSHTIBAN_LIMOOTOORSH



توجه توجه:

برگزاری آزمون های جامع لیموترش در درس ریاضی
اولین مرتبه آزمون جامع = ۲۵ دی ۹۸
مطابق با آزمون ۲۷ دی قهچ
منتظرین هستیم





آزمون شماره ۱

۱۳۹۸/۱۰/۲۰

بسم الله الرحمن الرحيم

اگر دانشگاه اصلاح شود، مملکت اصلاح می شود.

« امام خمینی »

لیموترش

آزمون ریاضیات تجربی - ویژه پایه دوازدهم

دفترچه سوالات

آزمون

شماره ۱

۱- امید علی محمدی ۲- علی داوودوندی

مؤلفان: بودجه بندی آزمون و ویژگی های پاسخنامه ویراستاران

درسنامه های نکات کنکوری ۹۹ بررسی دیدگاه طراحان کنکور



تحلیل دقیق و کامل تست ها



راه حل های واقعا تستی و کاربردی

پروژه آزمون های مرحله ای - ۲۰ سوال



برای ثبت نام در

آزمون ها اسکن کنید



Limootorsh.com

هشدار: هرگونه کپی برداری و استفاده از منابع این آزمون شرعا حرام و بیگردد قانونی دارد



آزمون ریاضیات تجربی - ویژه کنکور ۹۹

